dove

e quest'equazione rappresenta un sistema di spazi ad n — i dimensioni, che possono essere definiti come le trajettorie ortogonali di tutte k geodetiche convergenti verso uno stesso punto all'infinito (#° , $x°_2$, ... #°). Le varie trajettorie sono distinte fra loro dai valori del parametro p , che esprime la distanza costante fra una qualunque di esse e la trajettoria determinata p = o. La costante i è data quando è dato un punto di quest'ultima trajettoria.

Ora si dimostrerà che la natura dello spazio fin qui considerato è tale che, limitandone una porzione qualunque e trasportandola in una posizione diversa da quella che prima occupava, si può sempre ottenerne la sovrapposizione con un'altra porzione corrispondente dello stesso spazio. Per concepire come ciò possa accadere si immagini disseminato in quella porzione di spazio un numero CO^{M} di punti, infinitamente vicini tra loro, e riuniti a due a due dagli archetti geodetici che ne misurano le mutue distanze. Ciò posto, la sovrapponibilità della quale si tratta consiste in questo, che in ogni altra parte dello spazio considerato si possono disseminare dei punti ad esso appartenenti, i quali hanno fra loro le medesime distanze mutue e la medesima disposizione che avevano quelli della porzione immaginata ; dimodoché il reticolo ^^{phce} formato dalle linee congiungenti i punti contigui di questa può essere completamente identificato col reticolo analogo dell'altra porzione, senza che i legami di essi devano essere in alcun punto rotti o duplicati. Le alterazioni che il primo reticolo deve subire per identificarsi col secondo non possono del resto riescire apparenti che quando si considerano l'uno e l'altro in rapporto ad uno spazio avente pia di n dimensioni : finché ciò non accade i due reticoli presentano il carattere dell'eguaglianza per congruenza o per simmetria. Quest'ultima osservazione si collega con un ingegnoso riflesso di MOEBIUS *).

Suppongasi dapprima riferito lo spazio ad un nuovo sistema di assi geodetici delle y_{19} $y_{2)}$ ... y_n , aventi la stessa origine dei primi ed ortogonali fra loro al pari di questi. Siccome tutte le linee geodetiche sono rappresentate da equazioni lineari, così è chiaro che le sostituzioni per passare dalle variabili x alle variabili y devono essere lineari: ma è facile convincersi inoltre che la loro forma dev'esser quella denominata ortogonale. Infatti la forma (8) mostra che la distanza dall'origine ad un punto qualunque (^ , x_{29} ... $\#_M$) dipende solamente dalla funzione x^ ~f- x\ 4~ ' * " H~ ^{x}l - Si avrà dunque

*) Der bar y centrisele Calcili, pag. 184 (Leipzig, 1827).